

Wrocław, dnia 12 września 2016

Dr hab. Dariusz Grech, prof. UWr  
Instytut Fizyki Teoretycznej  
Wydział Fizyki i Astronomii  
Uniwersytet Wrocławski  
Pl. Maksa Borna 9  
50-204 Wrocław

## **Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. inż. Marcina Forczka pt.: „Multiscale characteristics of linear and nonlinear cross- correlations in financial markets”**

### **1. Ogólna charakterystyka rozprawy**

Przedstawiona mi do recenzji rozprawa doktorska została napisana w języku angielskim w postaci książki, a więc w jednej z form ustawowo dopuszczonych dla tego typu rozpraw. Składa się z sześciu rozdziałów, obszernego spisu literatury obejmującego 119 pozycji, spisu tabel i wykresów oraz końcowego zestawienia spółek akcyjnych wraz z kodami Bloomburga i przypisaniem do konkretnej branży gospodarki, których notowania były przedmiotem analizy w rozprawie. W pracy wzięto do obliczeń zarówno notowania spółek tworzących główny indeks giełdy amerykańskiej DJIA jak i 100 spółek o największej kapitalizacji oraz 100 o najmniejszej, wchodzących do indeksu NYSE, a także notowania kursów wymiany głównych walut świata z rynku FOREX. Wykorzystano dane historyczne szybko i wolnozmiennie z różnych okresów w latach 1997-2011.

Praca doktorska liczy w sumie ponad 130 stron. Od razu należy podkreślić, że napisana jest starannie, dobrym językiem angielskim z pewną tylko ilością błędów interpunkcyjnych, do których w dalszym ciągu nie będę się odnosił. Ilość i rodzaj przedstawianych wykresów w celu poparcia prezentowanych wyników badań jest wystarczająca. Wykresy są w większości czytelne, choć w niektórych wypadkach (zwłaszcza w rozdziale 2) zabrakło mi wskazania jednostek na osi poziomej, których czytelnik może się jedynie domyślać czytając dokładnie tekst pracy, o czym dalej.

Głównym celem rozprawy było przeprowadzenie dokładnej analizy fraktalnej i multifraktalnej wybranych danych finansowych z jedno- i wielowymiarowych szeregów czasowych ze szczególnym uwzględnieniem wzajemnego oddziaływania poszczególnych elementów rynku finansowego i przy zmiennej częstotliwości próbkowania danych (od sekund do dni). Badano przy tym zarówno mono- i multifraktalne własności jednowymiarowych szeregów finansowych (czasowych), rozkłady statystyczne zwrotów, jak i wzajemne „oddziaływania” danych równoległych na siebie. W tym celu przeanalizowano np. własności szczytkowych zwrotów w zamkniętym trójkącie wymiany walut (ang. *triangular relation deviations*) (p. rozdział 2) oraz wprowadzono nowatorską metodę multifraktalnej analizy korelacji krzyżowych (ang. *Multifractal Cross-Correlation Analysis – MFCCA*) w rozdziale 4, która w przeciwieństwie do istniejących do tej pory algorytmów pozwala na precyzyjną i bezbłędną identyfikację oraz opis ilościowy nieliniowych korelacji krzyżowych między danymi równoległymi. Doktorant w przedostatnim rozdziale swej rozprawy rozszerzył techniczne

elementy MFCCA proponując nową miarę nieliniowych korelacji krzyżowych, czyli tzw.  $q$ -zdeformowany współczynnik nieliniowych korelacji krzyżowych  $\rho_q$ . Wykorzystany on został następnie bardzo pomysłowo do zbudowania nowego typu drzew minimalnego zasięgu (ang. Minimal Spanning Trees – MST), czyli grafów drzewiastych, w których połączenia indukowane są wielkością współczynnika korelacji krzyżowych  $\rho_q$ . W rozprawie dokładnie przebadano topologię tak uzyskanych grafów, dowodząc ich bezskalowego charakteru oraz pokazując m.in. przy użyciu wykładnika skalowania wierzchołków grafu w jaki sposób zachodzi ewolucja czasowa korelacji krzyżowych na rynku papierów wartościowych i co więcej - jak ewoluują sprzężenia fluktuacji zwrotów o zróżnicowanych wielkościach.

Nieliniowe korelacje krzyżowe i ich charakterystyka jest jednym z głównych problemów intensywnie badanych przez grupę prof. S. Drożdża wraz ze współpracownikami, do której należy Doktorant. Trzeba zaznaczyć, że wkład tej grupy do światowego rozwoju multifraktalnego podejścia w analizie ilościowej korelacji krzyżowych w wielowymiarowych szeregach czasowych jest nie tylko zauważalny, ale wręcz dominujący. Świadczy o tym opracowanie przez grupę nowego algorytmu analizy multifraktalnej MFCCA, w którym usunęli niedociągnięcia poprzednio stosowanego algorytmu MFDXA zaproponowanego przez W.-X. Zhou (PRE, 2008). To zagadnienie zostało właśnie dokładnie opisane w rozdziale 4 rozprawy a Pan mgr inż. Marcin Forczek miał istotny wkład w przeprowadzeniu symulacji potwierdzających przewagę MFCCA nad MFDXA, co zaowocowało coraz szerzej cytowaną publikacją w PRE [67].

Rozprawa wpisuje się więc doskonale w jeden z najgorętszych nurtów badań współczesnej ekonofizyki, a rozdział 5 otwiera nowe pole badań. Uważam, że najciekawszą częścią rozprawy i zawierającą najważniejsze wyniki są rozdziały 4 (zwłaszcza 4.3 i 4.4) oraz 5.

Wyniki rozdziału 5 pokazują, że nawet jeśli w pierwotnym opisie nieliniowych korelacji krzyżowych traci się ich własność multiskalowania i obecność multifraktalności (a taka utrata jest dla fizyka i ekonofizyka dużym stresem), to prawo potęgowe, choć w trochę innym aspekcie, może być odtwarzane na poziomie topologii grafu generowanego w odpowiedni sposób z  $q$ -zdeformowanych współczynników korelacji krzyżowych  $\rho_q$ . Ta część rozprawy nie została według mojej wiedzy dotąd opublikowana. Według mnie sama zawartość rozdziałów 5 i 4.3-4.4 zawiera wyniki na tyle interesujące, że mogą być podstawą ubiegania się o stopień doktora w dyscyplinie fizyki.

Rozdziały 2 i pozostała część rozdziału 4 zawierają wyniki już opublikowane. Zawartość tej części rozprawy opiera się na praktycznym wykorzystaniu do konkretnych rodzajów danych finansowych metod już znanych (np. DFA, MFDFA, rozkłady gruboogoniaste). O publikacji tych wyników dowiadujemy się pośrednio czytając rozprawę i odnosząc się do poszczególnych referencji w tekście. Brakuje mi tu jednak oddzielnego wyszczególnienia publikacji Autora, w oparciu o które powstała ta część rozprawy.

Każdy z rozdziałów (z wyjątkiem wstępu i rozdziału 3) opatrzony jest dość wyczerpującym wprowadzeniem do tematyki obejmującym bardzo dobrze napisany przegląd dotychczasowych osiągnięć w literaturze. Dzięki temu rozprawę czyta się nadzwyczaj dobrze i nawet czytelnik nie specjalizujący się w tematyce może prawie bez zaglądania do cytowanej literatury dobrze zrozumieć sens postawionego problemu i metodykę jego rozwiązywania. Rozdział 3 stanowi odrębne, zwarte, ale wyczerpujące kompendium wiedzy na temat formalizmu fraktalnego i multifraktalnego. Uważam, że przedstawiona rozprawa prócz swoich walorów naukowych może z powodzeniem służyć jako dobrze napisany podręcznik analizy multifraktalnej dla studentów i doktorantów i jest to niewątpliwie jej dodatkowy walor.

## 2. Szczegółowa merytoryczna ocena zawartości naukowej rozprawy

Pierwszym z rozdziałów prezentującym nowe wyniki jest rozdział 2. W pierwszej części rozdziału badane są rozkłady zwrotów na rynku FOREX w różnych skalach czasowych od 5s do 10 min. Wykazują one spodziewane własności leptokurtyczne z wykładnikiem skalowania ogonów rozkładu skumulowanego w zakresie  $3 < \alpha < 5$  w zależności od częstości próbkowania danych, a więc tzw. odwrotne prawo kubiczne zwrotów (ang. inverse cubic law) nie jest spełnione. Niestety pokazano również, że nie ma istotnej zależności między wartością wykładnika skalowania a użytą skalą czasową. Inaczej zachowują się rozkłady dla szczytkowych zwrotów w zamkniętym trójkącie wymiany walut na rynku pieniądza. Już poczynając od najmniejszej skali czasowej rozkłady te szybko zmierzają w kierunku rozkładu normalnego wraz ze wzrostem opóźnienia czasowego. Możliwe wytłumaczenie tej różnicy proponowane w rozprawie wskazuje na szybszą wymianę informacji na rynku pieniądza niż na rynku papierów wartościowych - i jest to bardzo prawdopodobne. Podobne rozważania są kontynuowane w dalszej części rozdziału 2., tyle że w odniesieniu do spółek tworzących amerykański indeks DJIA. Inne są jednak nieco badane skale czasowe (od 1 min do 60 min). Rozkłady zwrotów okazują się być również leptokurtyczne, tyle że wykładnik skalowania ogonów rozkładu jest znacznie mniejszy ( $\alpha \approx 2.5$ ). Doktorant w tym wypadku pokazał zmienność grubości ogonów rozkładu w innym języku – posługując się dopasowaniem do  $q$ -normalnego rozkładu Tsallisa.

To posunięcie uważam za bardzo słuszne, bo dopasowując w miarę dobrze rozkład powinniśmy żądać by wszystkie dane, a nie tylko ogony rozkładu były dopasowane do modelu. Zaowocowało to stwierdzeniem, że parametr deformacji Tsallisa  $q$  maleje monotonicznie wraz ze wzrostem skali czasu w której pobieramy dane. Szkoda, że podobne podejście nie zostało zastosowane przy poprzednio omawianym rynku FOREX. Szkoda również, że w tym miejscu nie zostały zacytowane dwie prace, które traktują o podobnych problemach: *M. Ausloos, K. Ivanova, Phys. Rev. E 68, 046122 (2003)*, w której pokazano, że na rynku amerykańskim rozkłady zwrotów dążą asymptotycznie do wartości gaussowskich dopiero przy skali przesunięcia czasowego (*time-lag*) powyżej 40 dni oraz *Ł. Bil, et al., Acta Physica Polonica A 129 (2016) 986*, w której badano podobne zagadnienia, ale na polskim rynku papierów wartościowych, ukazując pełne charakterystyki zależności między parametrem deformacji Tsallisa  $q$  a skalą przesunięcia czasowego używanego przy liczeniu zwrotów. Tej ostatniej pracy Doktorant mógł jednak jeszcze nie widzieć pisząc swą rozprawę.

W dalszej części rozdziału 2 potwierdzono brak istnienia autokorelacji liniowej zwrotów przy istotnej obecności tejże w tzw. zmienności (volatility) – zarówno liczonej na zwrotach danych wyjściowych kursów wymiany walut, jak i na szczytkowych zwrotach w zamkniętym trójkącie wymiany walut. Ten wynik jednak nie zaskakuje, gdyż panuje ogólna zgoda, że efekty klastrowania zwrotów i pojawiania się grubych ogonów mają swe źródło w bardziej skomplikowanych efektach pamięci w danych niż dwupunktowe Pearsonowskie funkcje korelacyjne, czyli np. w korelacjach nieliniowych, do których Doktorant przechodzi (i słusznie) w dalszej części rozprawy.

Kolejne nowe wyniki przynosi rozdział 4. Badane są tu na samym początku spektra multifraktalne kursów wymiany podstawowych walut świata (USD, EUR, GBP, JPY, AUD) (używany jest głównie język Höldera do opisu multifraktalności). Udowodniono istnienie wyraźnej struktury multifraktalnej i pokazano asymetrię spektrum multifraktalnego, a efekty pozornej multifraktalności zostały skonfrontowane z uzyskanymi wynikami poprzez szufłowanie danych (zwrotów) i zastosowanie surogat Fouriera. W tym miejscu można było zastosować gotowe pół-analityczne formuły pozwalające wyliczyć efekty pozornej multifraktalności w zależności od długości rozpatrywanych danych i ich stopnia perzystencji (D. Grech, G. Pamuła (2013, 2014)) – pierwsza z tych prac jest nawet cytowana w doktoracie ([82]). Niemniej wyniki wyszłyby podobne (mieszanie danych niszczy również

perzystencję danych zakłócając nieco poziom pozornej multifraktalności). Pojawiającą się asymetrię w spektrum multifraktalnym wyjaśnia się w rozprawie jako prawdopodobny wynik przewagi dużych fluktuacji w sygnale nad małymi. Sądzę, że jest to istotny problem do dalszej analizy. Natomiast istotnie nowym i niespodziewanym dla mnie wynikiem tej części rozprawy było pokazanie braku skalowania funkcji fluktuacyjnej  $F_x(q, s)$  w rozpatrywanym zakresie parametru deformacji  $-4 < q < 4$  dla szczytkowych zwrotów w zamkniętym trójkącie wymiany walut w skali 5 s - 1 min. Prowadzi to do konkluzji (Doktorant tego jawnie nie napisał), że w tym obszarze danych nie stwierdza się multifraktalności. Ponieważ inna praca ([31]) (S. Drożdż, et al., Journal of Physics 2010) zawiera wniosek przeciwny aczkolwiek rozpatrywane dane były tam brane w innym okresie, pozostaje wciąż otwarte pytanie, czy brak skalowania multifraktalnej funkcji korelacyjnej dla zwrotów szczytkowych z trójkąta wymiany walut jest regułą czy wyjątkiem. To odkrycie powinno być według mnie przedmiotem dalszych wnikliwych badań i głębszego zrozumienia, ale dobrze że w rozprawie zwrócono na to uwagę. W pracy postawiono hipotezę, że stoi za tym różnica w długości danych wziętych do analizy w obu przypadkach (odpowiednio 89 000 i 1.7 miliony danych); nie sprawdzono jej jednak. Uzyskiwane wyniki w ramach standardowej metody MF DFA (Multifractal Detrended Multifractal Analysis) porównano również w rozprawie ze starszą historycznie metodą falkową. Główne wyniki ilościowe tego porównania zawiera Tabela 4.2. Niestety nie mogę tu zgodzić się z konkluzją Doktoranta, że porównanie wyników co do szerokości spektrum multifraktalnego i współczynnika jego asymetrii jest dla obu metod podobne i potwierdza niezawodność ich obu. Z przedstawionych rezultatów wynika bowiem, że aż dla połowy spółek amerykańskich z sektorów: dobra przemysłowe, środki ochrony zdrowia, sektor finansowy i dobra konsumpcyjne zauważone różnice względne w tych parametrach mogą sięgać nawet do 50%, co wyklucza raczej zamienne stosowanie obu metod. Jednak ta rozbieżność nie ma wpływu na inne wyniki uzyskane w rozprawie i jest dodatkową analizą zrobioną niejako „przy okazji”.

Dalsza część rozprawy koncentruje się na badaniu korelacji nieliniowych w danych równoległych – na początku z użyciem nowatorskiej i wspomnianej już wyżej metody MFCCA omówionej w podrozdziale 4.3. Skuteczność tej metody i jej niewątpliwą przewagę nad MF DCA (Multifractal Detrended Cross Correlation Analysis) wprowadzoną przez W.-X. Zhou w 2008 roku (patrz ref. [62] w rozprawie) Doktorant uzasadnia serią wyników uzyskanych na syntetycznych danych skorelowanych krzyżowo, wygenerowanych w procesie typu FARIMA (Fig.4.17). Jest to bardzo przekonujące. Nowatorska metoda została następnie użyta do detekcji długiej (zadanej prawem potęgowym) pamięci w nieliniowych korelacjach krzyżowych między różnymi danymi finansowymi. Pozwoliło to pokazać, że nie ma jednak uniwersalności własności multifraktalnych korelacji krzyżowych w szeregach finansowych. O ile dla rynku FOREX metoda MFCCA ukazała istotnie prawa skalowania funkcji fluktuacyjnej  $F_{xy}(q, s)$  w szerokim zakresie wielkości pudełek  $s$  i dla parametru deformacji  $-4 \leq q \leq 4$ , to nie udało się to już tak dobrze dla rynku papierów wartościowych z indeksu DJIA. W tym ostatnim przypadku pokazano w pracy, że obszar skalowania był o wiele mniejszy, a zakres parametrów deformacji przy którym zachodziło skalowanie ograniczał się tylko do  $q > 1$ , a więc praktycznie wyłącznie do dużych fluktuacji w korelacjach krzyżowych zwrotów (Fig.4.22). Co więcej, dokładniejsza analiza wykresu Fig. 4.22 dowodzi, że w istocie zakres  $q$  należałoby jeszcze bardziej przyciąć do  $1 < q < 3$ . Według mnie sytuacja może tu być tak zła w wyniku specyfiki samego indeksu DJIA, który jest cenowo a nie kapitałowo ważony i posiada większe fluktuacje. Przedstawiony wynik jest jednak nadzwyczaj ciekawy i stymulujący do przeprowadzenia podobnych wyliczeń dla innych indeksów - tym razem kapitałowo ważonych (np. S&P500). Zabrakło mi trochę w rozprawie poglądu Doktoranta na ten temat – gdyż może to być pierwsza obserwacja schyłku podejścia multifraktalnego do analizy nieliniowych korelacji krzyżowych w finansach.

Jest to wiadomość negatywna, ale wiedza negatywna też jest istotna, bo stanowi zazwyczaj źródło istotnego postępu w nauce. Jak rozumiem Doktorant zechciał ten fakt wykorzystać spoglądając następnie na zagadnienie korelacji krzyżowych z nieco innej perspektywy – nie multifraktalnej, ale wykorzystując pewne multifraktalne techniki obliczeniowe. W tym celu, wprowadził w przedostatnim rozdziale rozprawy  $q$ -uogólniony współczynnik korelacji krzyżowych  $\rho_q$ , którego obliczenie opiera się na algorytmach zaczerpniętych z MFCCA. Może się on skalować wraz z wielkością okna czasowego  $s$ , ale jeśli się nie skaluje, to i tak kłopotu nie ma, bo głównym zadaniem współczynnika jest stworzenie topologii grafu MST (Minimal Spanning Tree). Należy policzyć na duży plus, że w rozprawie dyskutowane są dość drobiazgowo problemy z przeniesieniem nowej miary korelacji krzyżowych na sieci (np. problem nierówności trójkąta) i umiejętnie ich obejście (pokazanie że korelacje krzyżowe w rozważanych danych praktycznie znikają dla  $q < 0$ , co pozwala ominąć brak spełnienia nierówności trójkąta dla odległości wyznaczonych nową miarą korelacji krzyżowych w tym zakresie  $q$ ).

Tę część rozprawy uważam za najlepszą i najbardziej inspirującą. Znakomity pomysł przeniesienia nowatorsko zdefiniowanej miary korelacji nieliniowych na sieci umożliwi bowiem dalsze badanie struktury układu złożonego, którym jest giełda w języku topologii grafów zawierających informacje o korelacjach nieliniowych! To absolutnie nowatorskie podejście warte jest szczególnego wskazania i uznania w rozprawie.

W konsekwencji w rozdziale 5. przeprowadzona jest dogłębna analiza topologiczna tak uzyskanych drzew (sieci) dla dużych i małych spółek tworzących główne amerykańskie indeksy giełdowe (DJIA, NYSE). Na uwagę zasługuje prowadzenie tej analizy zarówno w funkcji czasu biorąc pod uwagę ewolucję sieci jak i w funkcji parametru deformacji  $q$  dzięki któremu można niezależnie analizować nieliniowe korelacje krzyżowe mniejszych i większych fluktuacji w sygnale. Po raz pierwszy według mojej wiedzy dało to obraz nie tylko sieci ewoluującej w czasie ale także modyfikowanej równocześnie wielkością fluktuacji w danych. W rozprawie udowadnia się też, że sieci te mają charakter sieci bezskalowych co prowadzi do pojawienia się prawa potęgowego rozkładu stopnia węzłów sieci z charakterystycznym wykładnikiem zależnym od wielkości fluktuacji. Jego asymptotyczna wartość w granicy długich czasów (tygodniowe okna czasowe) jest znajdowana w rozprawie na  $\alpha = 2$ , co jest zgodne z analitycznym wynikiem dla bezskalowych sieci Barabasi-Alberta uzyskanym dla sieci ewoluujących w metodzie czasu ciągłego (R. Albert, A. Barabasi, Rev. Mod. Phys. 74, 2002, 47). W tym kontekście więc najważniejsze są odstępstwa od skalowania jako takiego, bądź odstępstwa od asymptotycznej wartości wykładnika w przypadku potwierzonego skalowania – szczególnie w przypadku pojawiania się zjawisk krytycznych i ekstremalnych w układzie złożonym, którym jest giełda. Doktorant klasyfikuje uzyskane parametry opisujące topologię sieci i słusznie zauważa, że ze wzrostem dużych fluktuacji w sieci - co jest monitorowane odpowiednim doбором parametru  $q$  - znacznie wzrasta siła powiązań między węzłami (spółkami). Stworzone zostały w ten sposób podstawy nowego języka opisu dynamiki giełdy papierów wartościowych (a być może też rynku pieniądza) oparte na metodach stosowanych powszechnie w fizyce układów złożonych, które być może będą stanowić nowe narzędzie przewidywań zdarzeń ekstremalnych, co zapewne doczeka się odrębnych publikacji.

Słusznie zaznacza Doktorant w tej części rozprawy, że sugerowana metoda może po lepszym dopracowaniu stanowić istotny wkład w rozwinięcie analizy i konstrukcji portfeli inwestycyjnych wprowadzonej jeszcze w latach '50 ubiegłego wieku przez H. Markowitza, a uwzględniającej krzyżowe korelacje nieliniowe między spółkami czy walutami. Chcę wskazać, że dobrze byłoby zastosować te metodę również do rynku FOREX i spróbować opublikować rezultaty łącznie, gdyż zastosowanie do innego rodzaju danych o większej płynności jakim są dane z rynku pieniądza narzuca się samo.

### 3. Pozostałe uwagi

Zauważyłem następujące usterki (głównie redakcyjne) w rozprawie oraz parę nietrafnych sformułowań w pracy (wskazuję w kolejności występowania w rozprawie):

- we wzorze (3) definiującym rozkład Levy'ego całkowanie winno odbywać się po zmiennej  $k$  a nie  $q$
- w pracy podana jest jedynie pierwotna definicja „obciętego rozkładu Levy'ego” pochodząca z ref. [7], podczas gdy w powszechnym użyciu występuje postać późniejsza z wykładniczo „obciętymi” ogonami rozkładu Levy'ego, gwarantująca analityczną postać funkcji charakterystycznej rozkładu „obciętego” (I. Koponen, PRE 1995)
- ostatnie zdanie w przypisie (5) na str. 9 „For stable financial time series, minute and hourly returns should have the same variance and mean value” co miałoby być wynikiem stabilności rozkładu zwrotów nie jest prawdziwe – będzie tak dopiero po odpowiednim przeskalowaniu sumy zmiennych losowych przez  $\sqrt{N}$ , gdzie  $N$  jest ilością zmiennych w sumie (w konkretnym przypadku  $N=60$ )
- w równaniu (9) w ostatnim wyrażeniu na czynnik normujący rozkładu Tsallisa dla  $1 < q < 3$  brak jest odwrotności drugiego  $q$ -zdeformowanego momentu  $B_q$  pod pierwiastkiem kwadratowym
- w zapisie własności relacji trójkątnych dla logarytmicznych zwrotów walutowych na str.14 i 15 mnożenie (\*) powinno być zastąpione dodawaniem (+)
- dotkliwy jest brak jednostek na osi poziomej czasu na wykresach w rozdziale 2
- w znaku wykładnika skalowania we wzorze (20) jest pomyłka: winno być  $-H$  zamiast  $H$
- Doktorant dość „obojętnie” przeszedł wobec problemu ujemnych wartości parametru deformacji  $q$  przy próbie jego interpretacji termodynamicznej jako odwrotność temperatury
- błędne sformułowanie w drugim akapicie rozdziału 4 na str. 44: „By eliminating the trend, we will obtain a stationary signal” – eliminacja trendu na ogół nie wystarczy przecież by otrzymać sygnał (proces) stacjonarny
- po lewej stronie równania (56) nawiasy [.] winny być chyba zastąpione znakiem wartości bezwzględnej |.| skoro funkcja krzyżowych fluktuacji  $F_{xy}^q(s)$  może przyjmować wartości ujemne?
- wykładnik skalowania  $\lambda$  metody DCCA pojawiający się na str. 70 nie został nigdzie w pracy zdefiniowany
- w algorytmach konstrukcji procesów FARIMA (wzory (58) i (59)) odejmowanie po prawych stronach obu wzorów powinno być zastąpione mnożeniem, a we wzorze (59)  $x_{i-j}$  po prawej stronie równania zastąpione przez  $y_{i-j}$
- niezrozumiałe i mylące jest sformułowanie poprzedzające definicję średniego uogólnionego wykładnika Hursta  $h_{xy}(q)$  przed wzorem (62)
- brak legendy wyjaśniającej znaczenie kolorów na rys. 4.15 - 4.17 – trudno zorientować się z wykresów co przedstawia średni uogólniony wykładnik Hursta  $h_{xy}(q)$  a co wykładnik skalowania  $\lambda_q$  metody MFCCA
- mylące jest sformułowanie przed wzorem (65) na str. (65): „As has been mentioned above, if there exists a cross-correlation between two time series, the following relation is valid...” . Przecież nieliniowe korelacje krzyżowe liczone z wykorzystaniem funkcji krzyżowych fluktuacji  $F_{xy}(q,s)$  mogą nie podlegać prawu potęgowemu. Taki właśnie przypadek zainspirował badaczy do wprowadzenia  $q$ -uogólnionego współczynnika korelacji krzyżowych  $\rho_q$  w ref. [94], zaś Doktoranta (jak sadzę) do wykorzystania tego nowego współczynnika w nowatorskim podejściu opartym o analizę sieci MST zbudowanych na znowelizowanym (nie Pearsonowskim) współczynniku korelacji krzyżowych w rozdziale 5.
- używa się identycznego symbolu  $q$  przy multifraktalności oraz przy  $q$ -zdeformowanym rozkładzie Tsallisa, a są to inne parametry

Należy jednak podkreślić, że nieścisłości we wzorach nie zostały zaimplementowane w obliczeniach numerycznych, więc pozostają bez znaczenia na uzyskane rezultaty. Mój niedosyt budzi również mało precyzyjne wskazanie w poszczególnych rozdziałach rozprawy poświęconych w zasadzie odrębnym problemom badawczym choć spiętym wspólną klamrą własności fraktalnych i multifraktalnych jedno- i wielowymiarowych szeregów czasowych, jaki faktyczny udział miał doktorant w uzyskaniu poszczególnych wyników. Z treści rozprawy można wywnioskować, że Doktorant miał dominujący udział w analizie numerycznej – jest współautorem dwu publikacji z listy filadelfijskiej (pozycje [4] i [67] w spisie bibliografii), ale czy i w jakim stopniu uczestniczył w analizie i dyskusji końcowych wyników i wnioskach? Podobnie jaka była rola Doktoranta w uzyskaniu nieopublikowanych jeszcze wyników rozdziału 5 oraz w samym pomysśle modernizacji drzew MST w oparciu o nowy współczynnik nieliniowych korelacji krzyżowych  $\rho_q$ ? Będę wdzięczny za dokładniejsze omówienie tej kwestii przy obronie, zwłaszcza że do rozprawy nie dołączone zostały oświadczenia współautorów materiału już opublikowanego.

Z drugiej strony chcę wyraźnie podkreślić, że jestem pod wrażeniem sprawności numerycznej którą wykazał się Doktorant prowadząc analizę danych. Sprawnie porusza się On zarówno w tworzeniu danych sztucznych o zadanych własnościach fraktalnych, multifraktalnych i korelacyjnych (krzyżowych), budowaniu procesów stochastycznych o zadanych parametrach jak i w analizie danych rzeczywistych w tym dużych plików danych. Warto zauważyć, że niemal za wszystkimi wynikami prezentowanymi w pracy doktorskiej stoi ogromna ilość pośrednich obliczeń numerycznych i analiz oraz dopasowań, które mają istotny wpływ na końcowy rezultat, a które mogą umknąć czytelnikowi mniej obznajomionemu w szczegółach procedur numerycznych prowadzących do końcowego celu. Uważam, że należy niewątpliwie docenić ten nakład pracy - niekoniecznie widoczny na pierwszy rzut oka - a wpisany w ogromną ilość obliczeń pośrednich, a w szczególności uwagę i czas, który należało tym obliczeniom poświęcić.

#### 4. Wnioski końcowe - podsumowanie

Praca jest ciekawie i przystępnie napisana z niewielką ilością usterek, które nie mają zasadniczego wpływu na jakość uzyskanych wyników i ich przedstawienie. Znakomicie wpisuje się we współczesny nurt badań ekonofizyki. Rozprawa prezentuje szereg nowych rezultatów, z których najciekawsze, dotyczące topologii grafów MST zbudowanych na nowatorsko zdefiniowanej krzyżowej korelacji nieliniowej nie zostały jeszcze opublikowane. Zawiera prawie kompletny zestaw pozycji w bibliografii. Przedstawiony doktorat jest inspiracją do dalszych badań i w mojej opinii na podstawie rozwinięcia prezentowanych wyników mogłyby powstać co najmniej 2-3 dalsze ciekawe publikacje. Rozdziały 4.3, 4.4 i 5 mogłyby według mnie stanowić samodzielnie podstawę ubiegania się o stopień doktora w dyscyplinie fizyka, stanowiąc oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Całość przedstawionego opracowania ma duży walor dydaktyczny i może służyć jako aktualny mini-przegląd zagadnień analizy mono- i multifraktalnej dla magistrantów i doktorantów

Dlatego w podsumowaniu moja ocena przedstawionej rozprawy jest bardzo pozytywna. Uważam, że w pełni spełnia ona wymagania ustawowe i wnoszę o dopuszczenie mgr. inż. Marcina Forczka i jego rozprawy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

